LA LEGGE DI TORRICELLI IN IDRODINAMICA: IL PRIMO CASO DI UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE IN FISICA

ROSARIA VELLA
Gruppo di Storia della Fisica Dipartimento di Scienze Fisiche
Università Federico II, Napoli

Torricelli suggerì per primo la legge della velocità di efflusso di un liquido da un foro praticato in basso ad un recipiente. Infatti, nel suo "De moto delle acque" pubblicato nel 1664, affermò, anche sulla base di varie esperienze, che "i liquidi che fuoriescono da un foro di un recipiente hanno la stessa velocità di un grave che cada dalla superficie libera del liquido fino all'altezza del foro". Poiché già si conosceva da Galileo che tale velocità di caduta da una altezza h è proporzionale a $\sqrt{h}$, in base all'affermazione precedente si ottiene che anche la velocità di efflusso è proporzionale a $\sqrt{h}$.

Qui si sostiene che quella di Torricelli in fluidodinamica costituisce la prima equazione differenziale del primo ordine comparsa nella storia della scienza. Di solito non gli si attribuisce questo merito perché non si attribuisce la nascita del calcolo differenziale a Cavalieri e Torricelli, il che invece è vero, pur di considerare una particolare fondazione della matematica quella di Weyl, invece dell'altra fondazione, quella di Newton e Leibniz.

Questa apparentemente semplice equazione differenziale di Torricelli pone, oltre il problema fondamentale di ogni equazione differenziale (se, assegnate le condizioni iniziali, l'equazione differenziale ($y'=f(x,y)$ ammette o no soluzioni, e in caso affermativo se ammetta una o più soluzioni), esemplarmente il problema delle soluzioni singolari: uno dei più complessi problemi dell'Analisi.

Si presentano la soluzione generale e i tipi di soluzione singolare, che sono diversi a seconda del tipo di matematica usata.

1. "Del moto delle acque" di Torricelli.

Già prima di Torricelli, nel 1639, Padre Mersenne scrisse a Descartes, di avere effettuato esperimenti prolungati sullo scorrimento dei fluidi e di aver osservato che "un tubo quadruplo dell'altezza non dà il doppio dell'acqua". Descartes invece, nel 1643, partendo sempre dall'esperienza, osservò, da una parte, che l'altezza del getto verticale dell'acqua uscente dal vaso sembra proporzionale all'altezza di carico (al di sopra dell'orifizio) e, dall'altra parte, che la distanza orizzontale del getto è proporzionale alla radice quadrata di questa ampiezza. Descartes dà un quadro teorico: introduce il principio di inerzia e in più la legge galileana della caduta dei corpi, secondo l'ipotesi che la velocità del getto alla sua uscita ha lo stesso valore che acquista un grave caduto da un'altezza uguale a quella del carico (questo è il cuore della legge di Torricelli) [1]. Recentemente, la pubblicazione della corrispondenza tra Cavalieri e Torricelli [2] ha fatto scoprire che già nel 1642 Torricelli aveva trovato la sua legge; che poi riporterà e giustificherà estesamente nell'opera successiva, la breve appendice "Del moto delle acque" (di 18 pagine) [3].

Dall'opera di Torricelli pubblicata nel 1644 riportiamo i punti salienti, che illustrano la legge di Torricelli. Le frasi contrassegnate dal doppio apice sono riportate dal suo testo. Per rendere più dinamica la lettura abbiamo schematizzato il testo in più sottoparagrafi.

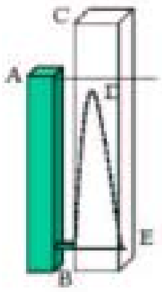

Fig. 1 – Impeto delle acque.

1.1 "Impeto delle acque."

Torricelli presenta l'acqua come "la più affine al moto, tanto che non è mai quasi in quiete". Dichiara "veramente aureo" il libro del suo maestro, Abate Benedetto Castelli, "sulla misura dei fiumi e delle acque correnti". Poi presenta i suoi risultati: "Noi passeremo a dire, attorno a questa materia, alcune piccolezze, per lo più inutili, tuttavia non del tutto prive di interesse" (p. 264-5). Sorprende la sua modestia nel presentare un risultato così importante per noi; ma la si può giustificare col fatto che le equazioni differenziali verranno sfruttate quasi un secolo dopo, a partire da Eulero.

Prima di tutto Torricelli suppone "che l'acqua che erompe con violenza da un orifizio abbia, nel punto della sua fuoriuscita, lo stesso impeto, che avrebbe un grave, ovvero una goccia della stessa acqua, che fosse caduto dalla superficie superiore del liquido, fino all'orifizio". Questo testo lascia apparire molto chiaramente che questa supposizione di Torricelli ha come modello la ricerca galileana della caduta dei gravi.

Per dimostrare la validità del modello Torricelli considera un tubo verticale AB (fig. \ref{Impeto delle acque}), "di capacità conveniente e sempre pieno di acqua fino al livello A, e lo si perfori con uno stretto, angusto orifizio, in B". La sua supposizione può essere resa "verosimile" collegando all'orifizio B un secondo tubo, usando un attacco privo di perdite, che se rivolto all'insù, faccia risalire l'acqua in uscita da B; allora l'acqua, che zampilla da B nel tubo BC, si risolleva fino all'altezza A.

Nelle sue osservazioni sperimentali sul fenomeno, Torricelli osserva che l'acqua non arriva giusto all'altezza di A, ma c'è un "difetto", la cui "causa" può essere data in "parte dall'impedimento dell'aria", e in "parte dalla stessa acqua, la quale, mentre dal punto più alto D torna in giù, impedisce e ritarda il suo stesso flusso ascendente". L'impedimento dell'aria è riscontrato da lui nell'agitazione dell'aria che sta attorno al getto dell'acqua. Torricelli sostiene allora che l'esperienza andrebbe molto meglio se invece dell'acqua si usasse il mercurio, che risente di meno l'attrito dell'area; e inoltre quanto più piccole sono le gocce d'acqua, tanto più grande sarà il difetto. Curiosamente il secondo impedimento è attribuito alle gocce del ramo discendente della parabola non a quelle del ramo ascendente. Comunque con ciò ammette un contrasto teorico tra la schematizzazione della goccia d'acqua e quella di un moto d'insieme di un fluido composto da infinite gocce. Egli porta a sostegno della sua tesi il fatto che se si apre il foro all'improvviso, al primo istante il getto si innalza di più che nei tempi successivi. Infine egli dà una prova a posteriori: se qualche sua proposizione seguente venisse considerata valida, Torricelli dice che ciò dimostrerebbe la supposizione. Altrimenti Torricelli, in maniera brusca, invita a "saltare pure tutta questa appendice *del moto delle acque*. Oppure la si levi completamente dal libro. Le quali cose, per parte mia, concedo molto volentieri, nonostante [che] le esperienze, eseguite con ogni cura, abbiano confermato, con la più grande esattezza, gran parte delle seguenti proposizioni" (p. 266-7).

Dopo egli considera "l'acqua che ritorna in E, cioè nel piano orizzontale tirato al livello dell'orifizio B. Da Galileo sappiamo che l'impeto dell'acqua, che sia caduta da D in E, è sufficiente per riportarla da E in D. Dunque l'impeto in E è come l'impeto in B. Ma in E l'impeto è quello di un grave caduto da D in E, ovvero da A in B. Abbiamo detto infatti che il punto D, di per se stesso, dovrebbe trovarsi al livello AB, una volta tolti gli impedimenti che rallentano l'acqua. Dunque l'impeto in B è come quello di un grave, che sia caduto naturalmente da A in B" (p. 267). Già questo modello, costruito per analogia con la caduta di un corpo solido basta per concludere che

$v = \sqrt{2gh}$ e che quindi $\frac{dh}{dt} = \sqrt{2gh}$, la sua equazione differenziale. Ma Dugas non gli attribuiscono la dimostrazione matematica di questa legge ("Questa legge, che Torricelli annunciò dimostrarla senza ricavarla da principi generali della meccanica; occuperà Newton e Varignon ed è all'origine delle prime ricerche in idrodinamica" [4]), che fu poi ottenuta da Bernoulli [1].

1.2 Ampiezza delle parabole che descrivono il moto delle acque

Con il suo precedente modello egli può schematizzare il moto di un fluido, che apparentemente è del tutto continuo, come moto di particelle massive. Infatti passa a dimostrare "qualcosa che si accorda mirabilmente con la dottrina dei proietti" (p. 267): "le acque erompenti dai fori praticati in un tubo, descrivono delle parabole. Infatti le gocce che escono dal tubo sono simili a dei proiettili, perché, esse stesse, benché liquide, sono sferule gravi e coerenti".

Supponendo poi che i recipienti siano sempre pieni d'acqua, le gocce seguenti, emesse dunque con lo stesso impeto, percorrono la stessa traiettoria; quindi anche "il getto continuo di acqua fluente avrà forma di parabola" (p. 268). A ciò Marsenne obbiettò che nelle fontane il tratto discendente non segue un arco di parabola; ma Torricelli attribuisce giustamente ciò alla resistenza dell'aria; aggiunge di averlo sperimentato e verificato e descrive il suo esperimento(p. 267-8).

Per trovare le ampiezze delle varie parabole descritte nella caduta da un foro posto a diverse altezze dal tubo egli ricorre ad un particolare calcolo matematico. Considera il tubo AB (fig. 2), "sempre pieno, e forato opportunamente in C, D e E", e attorno al diametro AB traccia "il semicircolo AHB", di cui il centro del diametro è D, ed E e C gli sono equidistanti. Allora "L'ampiezza della parabola del getto che fluisce da E sull'orizzonte BG sarà dupla [il doppio] della linea EI, che si traccia orizzontalmente nel semicircolo. E l'ampiezza della parabola del getto che erompe da D sarà dupla [il doppio] della linea DH. E ciò si dimostra perché, essendo l'acqua come un proietto, ed essendo il punto più alto A, per la proposizione 5 di Galileo, saranno le sudduple [metà] delle ampiezze [le] medie proporzionali fra la sublimità [altezza del tubo meno l'altezza del foro] e l'altezza [del foro]. Perciò la metà delle ampiezze sono uguali alle linee EI e DH" (p. 269). Per esempio, per l'acqua che fuoriesce da E si ha: $AE : \frac{GB}{2} = \frac{GB}{2} : EB$. Infatti la sublimità di E è uguale a $AB - BE = AE$.

Dalla proposizione di Galileo si ha $AE : \frac{GB}{2} = \frac{GB}{2} : EB$ cioè $\frac{GB^2}{4} = AE * BE$.

Dal secondo teorema di Euclide (dove l'altezza di un triangolo retto è media proporzionale tra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa) si ha: $AE : EI = EI : EB \Rightarrow EI^2 = EB * AE$. Sostituendo in quella precedente abbiamo: $GB^2 = 4 * EI^2$ quindi $GB = 2 * EI$.

Ne segue il corollario che afferma che dal punto medio dall'altezza del tubo il getto d'acqua va il più lontano di tutti, e i fori che hanno distanza uguale dal punto di mezzo generano ampiezze uguali.

1.3 Tangenza e velocità del flusso delle acque

Come corollario ottiene: "... il getto dell'acqua fluente sarebbe tangente alla superficie del cono rettangolo, avente per asse lo stesso asse del tubo, e il cui vertice si trovi proprio alla superficie superiore dell'acqua" (pag. 270).

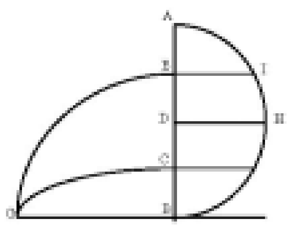

Fig. 2 – Ampiezza delle parabole.

Altro corollario: "Le velocità delle acque, che erompono dal tubo perforato AB, hanno la stessa proporzione delle linee applicate nella parabola, a ciascuna delle loro sublimità"; dove le linee applicate sono le semicorde del cerchio su disegnato. "Il tubo AB [fig. 3] sia sempre pieno d'acqua, e dai fori C e D escano le linee di flusso. Descritta la parabola AEF di asse AB, si tirino ordinatamente le [linee] CE e DF. La velocità in C starà dunque alla velocità in D, come l'impeto [orizzontale] di un grave, caduto da A in C, sta all'impeto [orizzontale] di un grave caduto da A in D. Cioè come CE sta a DF, per le cose dimostrate nel primo libro sul moto.

Corollario: "Segue da ciò per la dottrina dell'Abate Castelli, che la quantità d'acqua che esce dalla bocca C, sta alla quantità di acqua che esce da D (nel caso in cui i fori siano uguali), come CE sta DF. Cioè, le acque, che erompono da fori eguali, sono in proporzione suddupla delle sublimità, cioè delle loro altezze" (pag. 271). Il che è chiaro ricordando che la portata, a parità di sezione dipende dalla sola velocità v.

Poi considera un tubo AB, perforato nel fondo B, e da esso defluisca del liquido senza aggiungerne altro sopra; ottiene che "La velocità della superficie superiore del liquido latente nel tubo decresce con la medesima proporzione con la quale decrescono le linee ordinatamente inscritte nella parabola BD, di asse BA e vertice B" (pag. 272).

Torricelli continua trovando che: "dato il vaso AB, cilindrico o prismatico, perforato sul fondo in B. La velocità dell'acqua uscente da B risponderà, in ogni istante, nella stessa proporzione alla velocità del livello o della superficie superiore discendente del vaso... Perciò, la velocità dell'acqua che esce, starà, in ogni istante, alla velocità del livello discendente, in qualunque punto lo si consideri, sempre nella medesima proporzione" (pag. 274). Da qui dà il seguente corollario "Le quantità di acqua, che escono dallo stesso foro o da fori eguali, nel medesimo tempo, hanno la proporzione sudduplicata delle altezze" (pag. 275). E infine: "... il livello AE passerà, nel suo movimento, spazi uguali ad un grave lanciato in alto..." con una legge quadratica (pag. 278). In ultimo studia la differenza dell'efflusso dalla forma del recipiente (regolare e irregolare) (pag. 278-280).

Nonostante egli abbia stabilito tutte queste proprietà, la sua legge matematica resta implicita nel suo scritto. I suoi risultati sperimentali non furono concludenti: "L'esperienza stessa sembra in qualche modo provare questo principio, ma anche in qualche modo di negarlo" ([1], pag. 339). Le giustificazioni che dà non risulteranno del tutto convincenti (sul seguito delle ricerche su questo tema si veda [1]).

2. Le soluzioni singolari dell'equazione di Torricelli: un caso esemplare

Recentemente l'articolo di un matematico [5] prende l'equazione di Torricelli della fluidodinamica come caso esemplare per la discussione della unicità o non unicità nella soluzione delle equazioni differenziali ordinarie. La novità sta nel fatto che egli attribuisce questa precedenza storica ad un periodo, quello di Torricelli, che di solito è considerato semplicemente preparatorio alla nascita dell'analisi infinitesimale, che sarebbe avvenuta una generazione dopo (1687). Ciò può essere avvalorato dal fatto che uno di noi (A. D.) ha mostrato che il calcolo differenziale è nato con Cavalieri e Torricelli [6].

Infatti nel 1644 (quarant'anni prima di Leibniz e Newton) Cavalieri aveva ottenuto già una Analisi, basandosi solo sull'intuizione geometrica (o dei singoli punti, o delle totalità degli elementi razionali); Torricelli l'aveva migliorata fino ad ottenere (con un manoscritto postumo) il teorema cruciale, quello inverso, che dimostra che la derivazione è l'operazione inversa dell'integrale e viceversa. Questa analisi era però basata sull'intuizione geometrica; quindi agli storici è sembrata malcerta. Ma si può mostrare che essa corrisponde alla moderna matematica elementare di H. Weyl, formalmente ben definita. Cosicché si può affermare che il calcolo differenziale, contrariamente a quanto affermano di solito i testi, è nato anche formalmente con Cavalieri e Torricelli nel 1654, pur di collocare questo calcolo nella matematica di Weyl. Il calcolo degli infinitesimi di Newton e di Leibniz, è nato dopo, nel 1687, e deve essere collocato nell'analisi non-standard, che è diversa e più potente del calcolo "rigoroso" di Cauchy-Weierstrass (quello che viene insegnato da più di un secolo all'Università) e ancor più della matematica di Weyl.

Consideriamo ora un contenitore a forma di cilindro retto con un piccolo foro in basso, e sia y l'altezza dell'acqua al tempo t. La legge di Torricelli viene spiegata uguagliando, al solito, la velocità del liquido, che fluisce dal foro, con la velocità che acquista un corpo (goccia d'acqua) che cade sotto l'azione del suo peso per un dislivello pari a quello esistente dentro il recipiente tra la superficie libera del liquido e il foro. Questa descrizione dice che, in termini moderni, l'energia potenziale perduta da una massa *m* di acqua, che cade dall'altezza *y* >0, equivale all'energia cinetica di velocità *v* che guadagna la stessa massa che lascia il contenitore al suo fondo. Dall'equazione $mgy = \frac{1}{2}mv^2$ si ha $v = \sqrt{2gy}$

Passiamo ora ad una descrizione meno approssimativa. Sia ora *A* l'area della sezione trasversale del cilindro contenente il liquido, *a* l'area del foro e Δy la variazione di altezza durante un piccolo incremento di tempo Δt. Allora in questo tempo calcoliamo il volume d'acqua che esce: $A\Delta y \cong -av\Delta t \cong -a\sqrt{2gy}\Delta t$; e, passando dalle differenze finite alle derivate e dalle uguaglianze approssimative a quelle esatte, otteniamo:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{a}{A}\sqrt{2gy} \qquad (1)$$

con $y > 0$.

Si osservi inoltre che la legge di Torricelli vale nel limite in cui si può trascurare l'attrito interno, l'attrito con le pareti del recipiente e la resistenza dell'aria. In realtà, nel caso fisico studiato da Torricelli il valore di *k*, che si trova negli esperimenti, è per lo più minore di $\frac{a}{A}\sqrt{2g}$.

Nella didattica si può dare, come notizia, la precisazione che la quantità di liquido che fuoriesce non è determinata solo dall'area *a* del foro: infatti, il getto di liquido all'uscita subisce una contrazione ("strozzamento in vena"); e ciò avviene perché le linee di flusso, nell'insieme, non sono esattamente parallele tra loro e normali al foro, ma hanno una forma conoide. Fu J.C. Borda a trovare che il flusso dell'acqua, che fuoriesce dall'apertura, ha una sezione il cui diametro è più piccolo di quello dell'apertura. Egli suggerì $k = 0{,}6\left(\frac{a}{A}\right)\sqrt{2g}$. Si può verificare sperimentalmente che il rapporto φ tra la sezione *s* della vena contratta e quella con sezione la *a* del foro può essere un po' più grande di 0.6. Inoltre la velocità *v* data da $v = \sqrt{2gy}$ è quella che si ha nella vena contratta; mentre la velocità *V* nelle immediate vicinanze del foro è data da: $V = \varphi v[\ ]$.

In definitiva, abbiamo l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y(t)} \qquad (2)$$

per una certa costante $k > 0$. Tale equazione è risolubile facilmente per separazioni delle variabili:

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y(t)} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y(t)}} = -kdt \Rightarrow 2\sqrt{y(t)} = -kt + c$$

La soluzione indica una diminuzione dell'altezza *y* dall'istante $t = 0$, in cui inizia il fenomeno dell'efflusso, all'istante t_0 in cui esso termina. Poniamo come condizione finale $y(t_0) = 0$ e calcoliamo la costante *c*:

$$2\sqrt{y(t_0)} = -kt \Rightarrow c = kt_0$$

Quindi la soluzione generale è

$$y(t) = \left(-\frac{k}{2}(t - t_0)\right)^2 \tag{3}$$

Poiché *y'(t)* ≤ 0, ed essendo *y(t)* definita semipositiva per ragioni fisiche, la soluzione di (2) per tutti i t ≥ t_0 sarà *y(t)* = 0.

A parte il segno meno, questo caso di equazione differenziale (2) è tipico per lo studio della non unicità delle soluzioni, perché la funzione $f(t, y) = -k\sqrt{y(t)}$ non soddisfa la condizione di lipschitzianità: comunque si fissi $t \in \left]0, \infty\right[$ abbiamo che la funzione della sola *y*, $\psi_t(y) = f(t.y) = -k\sqrt{y(t)}$ è derivabile $\left(D(\psi_t(y)) = \frac{d}{dy}\left(-ky_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{k}{2\sqrt{y}}\right)$ ma non è limitata, cioè non esiste un'opportuna costante *L* tale che $\left|D\psi(y)_t\right| < L$. Infatti si presenta la non unicità quando si voglia risolvere l'equazione "all'indietro" nel tempo, per $0 \leq t \leq t_0$ con $y(t_0) = 0$.

Infatti se sappiamo in più che $y(0) = y_0 > 0$$ (cioè, inizialmente l'acqua nel recipiente è ad un'altezza y_0), sostituendo nella soluzione (3): $y(0) = y_0 = \left(-\frac{k}{2}(0 - t_0)\right)^2$ si ottiene il tempo necessario per svuotare il recipiente: $\frac{k}{2}\sqrt{y_0} = t_0$. Quindi l'unica soluzione della (2) è

$$y(t) = \left(\sqrt{y_0} - \frac{k}{2}t\right)^2 \text{ per } 0 < t < \frac{2}{k}\sqrt{y_0} \tag{4}$$

Ma se invece sapessimo soltanto che alla fine $y(t_0) = 0$, e non quanto vale *y* all'inizio, cioè *y(0)*, allora avremmo molte soluzioni della (2). Una delle soluzione sarà la funzione costante $y(t) = 0$; un'altra sarà la funzione (3); poi per ogni $t_1 \le t_0$ avremo una famiglia di curve del tipo

$$y^*(t) = \begin{cases} \left(\frac{k}{2}t_1 - \frac{k}{2}t\right)^2 & t < t_1 \\ 0 & t \ge t_1 \end{cases} \tag{5}$$

che soddisfano (2), cioè archi di parabola che partono da diverse altezze sull'asse delle *y* e poi raccordati sull'asse delle *x* con tratti di $y = 0$. Denotate quindi con $y^*(t)$ le soluzioni dell'equazione differenziale (2) e con Γ^* la relativa curva integrale, per $y(0) = y_0$ tutte le altre curve integrali passanti per $(t_0,0)$ sono comprese tra Γ^* e l'asse delle *t*. Tali curve riempiono la porzione di piano delimitata da Γ^* e l'asse *t*: tale circostanza è nota come "fenomeno di Peano" e le curve integrali costituiscono il "pennello di Peano" [7]. Queste soluzioni hanno un senso fisico: rappresentano i diversi modi secondo cui il contenitore può prima svuotarsi e poi rimanere vuoto per tutto il tempo $0 \le t \ge t_0$. Possiamo considerare tale fatto come il "fenomeno di Peano".

Quindi col teorema di Peano classico otteniamo l'esistenza della soluzione di un'equazione differenziale dalla sola ipotesi di continuità della funzione $f(x,y)$ (cioè integriamo una funzione continua), ma non l'unicità che dipende dalla lipschitzianità della *f*.

3. Dipendenza delle soluzioni dal tipo di matematica

In più osserviamo che lo studio delle soluzioni dell'equazione differenziale può essere affrontato con diverse matematiche in dipendenza dall'infinito che si usa: potenziale o in atto (e quest'ultimo caso secondo alcune gradazioni).

In matematica costruttiva, che si basa sull'infinito solo potenziale, non è possibile trovare la soluzione di un'equazione differenziale con le ipotesi che sono necessarie e sufficienti in matematica classica; c'è bisogno di un'ipotesi in più, l'integrazione uniforme (o, ancor meglio, l'uniforme continuità). Inoltre in matematica costruttiva le soluzioni singolari precedenti e quindi il "pennello di Peano" restano oscurate dalla indecidibilità della equazione differenziale che consegue dalla non lipschitzianità della *f*. Infatti esse non possono essere distinte, se non con una precisione incredibile su t_1, (il punto di raccordo), cosa impossibile in matematica costruttiva. Casomai esse sono ricavabili sotto ipotesi particolari, da studiare caso per caso [8].

Se, invece, vogliamo una matematica capace di risolvere l'equazione differenziale anche nei casi di soluzioni singolari (e precisamente per spiegare che più curve integrali passano per un stesso punto), proviamo ad usare la matematica di Weyl. Tale matematica di Weyl è molto interessante anche perché, come dicevamo in precedenza rappresenta l'antica matematica degli indivisibili di Cavalieri e Torricelli [6].

Per capire meglio quale sia la potenza della matematica di Weyl e precisarela sua differenza dalla matematica tradizionale si può ricorrere alla "matematica all'inverso", che è nata e poi è stata sviluppata negli ultimi trent'anni. Essa affronta il problema principale della matematica, la sua fondazione, in modo del tutto diverso da come lo si è affrontato nel passato. Si pone l'attenzione sui singoli assiomi: ogni assioma è utile, e a volte necessario, per una certa dimostrazione, ma può essere superfluo per un altro risultato [9]. Nella matematica all'inverso, si ottiene una stretta gerarchia di assiomi via via più potenti; a partire da quelli che definiscono la *PRA (Aritmetica Primitiva Ricorsiva) cioè l'aritmetica basata sulle funzioni ricorsive primitive più il principio di induzione nella forma più semplice (questo è il senso dell'indice 0 in A_0); per salire a sistemi di assiomi che già al terzo livello includono tutta l'analisi dei corsi universitari (mentre gli assiomi di Zermelo o della teoria degli insiemi ZFC sono molto più potenti).*

La matematica di Weyl è collocata al terzo livello, nel sottosistema ACA_0 (Assioma di Comprensione Aritmetico) *della matematica all'inverso. Quindi il sistema di assiomi della matematica di Weyl è poco più potente della matematica costruttiva ma è certamente molto meno potente rispetto ai potentissimi assiomi introdotti nella seconda metà del 1800 dalla matematica classica (ad esempio quello di Zermelo).*

Rispetto a questa gerarchia il teorema di Cauchy-Peano sull'esistenza locale delle soluzioni è ottenibile già nel sottosistema del secondo livello, inferiore ad ACA_0 e quindi a quello della matematica di Weyl; il suo assioma principale è il WKL_0 (Lemma debole di König: "Dato un albero infinito, finitamente ramificato, esiste un ramo infinito") [10]. Questo assioma è equivalente a proprietà anche più note e comuni:

- Ogni funzione continua su [0,1] (di uno spazio metrico compatto) è uniformemente continua;
- Ogni funzione continua su [0,1] ha il suo massimo;
- Ogni funzione uniformemente continua $[0,1]^n \to [0,1]^n$ ha un punto fisso [9].

Quindi per ottenere le soluzioni singolari dell'equazione differenziale di Torricelli non occorre la matematica classica, ma basta la matematica di Weyl. Da ciò ricaviamo una conseguenza storica significativa: a Torricelli bastava il quadro della matematica degli indivisibili di Cavalieri e sua, che utilizzava la sola intuizione geometrica per inventare un metodo di soluzione della sua equazione anche per il caso delle soluzioni singolari. Infatti il problema fisico che lo motiva poteva esser da lui posto: supporre che un osservatore nota che un invaso al tempo t_0 è svuotato, benché al tempo $t = 0 < t_0$ avrebbe dovuto essere riempito per un'altezza y_0 incognita; l'osservatore si pone il problema di ricostruire tutte le possibilità di svuotamento dell'invaso. Questo problema poteva essere risolto da Torricelli giustappunto in una maniera intuitiva geometricamente: sapendo che ogni efflusso è dato da un arco di parabola, raccordandola con un tratto di $y = 0$, egli poteva ottenere ogni possibile soluzione ed osservare che esse sono tante quanti sono i punti di raccordo $x = t_1$, con $0 \le t_1 \le t_0$ $.

In definitiva, la equazione differenziale di Torricelli è esemplare per mostrare le difficoltà nel trovare le soluzioni anche singolari e lo fa ad un livello minimo delle possibili matematiche. Il che rende particolarmente importante questo primo esempio storico di equazione differenziale in fisica teorica.

Bibliografia

[1] M. Blay, *La Naissance de la Mécanique Analytique,* PUF, Paris, 1992, 332-352.

[2] P. Galluzzi e M. Torrini, *Le opere dei discepoli di Galileo Galilei*. Carteggio (1642-1648) Olschki, Firenze, 1975, 26-27.

[3] E. Torricelli, *Opere scelte di Evangelista Torricelli* a cura di Lanfranco Belloni, UTET, Torino, 1975, 264-283.

[4] R. Dugas, *Histoire de la Mécanique*, Editions du Griffon, Neuchatel, 1950, 142.

[5] R. D. Driver, *Torricelli's Law-An Ideal Example of an Elementary ODE*, Amer. Math. Monthly, 105 (1998), 453-455.

[6] A. Drago, *New interpretation of Cavalieri's and Torricelli's Method of Indivisibles*, in J. Folta (ed.): *Science and Technology of Rudolfinian Time*, Nat. Technical Museum, Praha, 1997, 150-167.

[7] R. Fiorenza, D. Greco, *Lezione di Analisi Matematica,* Liguori, Napoli, volume secondo, 625-626.

[8] O. Aberth, *Computable Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1980, 121-129.

[9] S. G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Springer, Berlin, 1999.

[10] F.R. Drake, *On the Foundations of Mathematics in 1987*, in H. D. Ebbinghaus et al. (Editors), *Logic Colloquium '87*, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 1989, 11-18.